Table des matières

1 Introduction

Les abondances de l'hélium ainsi que d'autres éléments légers comme le deutérium et le lithium, observées dans notre univers, ne peuvent s'expliquer uniquement par la nucléosynthèse stellaire. En supposant que ces abondances sont issues d'une nucléosynthèse primordiale, c'est-à-dire dans les premières minutes du Big Bang, la mesure de l'hydrogène et de l'hélium contenus dans l'univers actuel peut constituer un argument de poids en faveur du modèle standard.

La première tentative de déduire les abondances des éléments légers issus des réactions nucléaires dans les premiers instants d'un univers de Friedmann a été effectuée en 1948 par Alpher, Beth et Gamow. En basant leurs calculs sur l'hypothèse sévère que, avant les réactions nucléaires, tous les baryons étaient des neutrons, ils trouvèrent que les abondances de l'hydrogène et de l'hélium apparaissaient dans des proportions dépendant fortement d'une constante h, reliant la température T à la densité de baryons ρ_B :

$$\rho_B = hT_9^3 \tag{1}$$

En 1950 Hayashi releva que pour des températures très élevées, les neutrons sont en équilibre thermodynamique avec les protons par le biais des interactions faibles. Les proportions des neutrons et des protons pouvaient alors être déduites à partir d'une distribution de Maxwell. A ce niveau, les résultats obtenus en choisissant une constante h appropriée, renforçaient l'hypothèse de la nucléosynthèse primordiale. Il restait toutefois la difficulté due à l'instabilité des éléments de masse 5 et 8, qui empêchaient la production d'éléments plus lourds. Cette difficulté a pu être franchie en travaillant avec une valeur de h plus élevée ce qui permis de créer du carbone à partir de trois noyaux d'hélium. Malheureusement, pour une valeur plus grande de h, le carbone ne devait apparaître que plus tardivement, en même temps que les métaux, ce qui était en contradiction avec les observations. Face à ces difficultés, la nucléosynthèse primordiale fût abandonnée durant plusieurs années en faveur de la nucléosynthèse stellaire. Le problème principal résultait cependant, dû au fait que la synthèse de l'hélium dans les étoiles aboutissait à un taux 10 fois inférieur aux observations. En 1964, Hoyle et Tayler reprirent l'idée d'une nucléosynthèse de l'hélium précédant les premières étoiles. En révisant la fraction de masse de l'hélium qui ne devait pas être inférieure à 0.27, une nouvelle estimation de h entre 10^{-4} et 10^2 pouvait conduire à des résultats convenables.

Une nouvelle preuve en faveur d'un univers de Friedmann est apparue en 1965 par la découverte, par Penezias et Wilson, du rayonnement fossile à 2.7 K.

En 1967 et 1973 Wagoner & al. ([3] et [4]) publient une révision de la nucléosynthèse cosmologique en utisisant des nouveaux taux de réactions. Les résultats obtenus sont en bon accord avec les observations, pour une valeur de h de l'ordre de 10^{-5} K.

En 1991, Esmailzadeh & al. proposent une méthode analitique pour suivre l'évolution des abondances des éléments légers. Notre étude sera essentiellement basée sur cette dernière publication.

Dans ce travail, nous suivrons numériquement les abondances des neutrons (n) et protons (p), du deutérium et du tritium (D et T), de l'hélium 3 et 4 (He_3 et He_4), du lithium 6 et 7 (Li_6, Li_7) et du bérilium 7 (B_7) durant toute la période de la nucléosynthèse primordiale.

Le chapitre 2 aura pour but d'introduire les équations d'évolution d'un univers de Friedmann, desquelles nous pourrons établir un calendrier des premiers temps de notre univers. Le chapitre 3 présentera plus en détail la période de nucléosynthèse cosmologique. Dans le chapitre 4, nous introduirons le réseau de réactions nucléaires spécifiques à la nucléosynthèse primordiale, et le chapitre 5 présentera les méthodes de résolution. Dans le chapitre 6 nous décrirons en détail les programmes développés. Les résultats apparaîtrons dans le chapitre 7.

2 Evolution de l'univers primordial

Dans ce chapitre nous exposerons dans un premier temps les équations qui régissent la dynamique de l'univers selon le modèle standard, puis, dans une deuxième partie, nous établirons un calendrier des étapes importantes des premières minutes de l'univers.

2.1 Equations des cosmologies et évolution temporelle

Nous discuterons ici l'évolution d'un univers de Friedmann, c'est -à-dire un univers homogène isotrope en expension. Dans de telles conditions, une des deux équations d'Einstein prend la forme suivante, appelée première équation des cosmologies :

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{R^2} \tag{2}$$

où R est le facteur d'échelle décrivant la dynamique de l'univers, ρ la densité de masse-énergie ($\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$, c=1) et $k = -\frac{2E}{m}$ avec E et m l'énergie et la masse totale d'un corps dans l'univers. Cette équation peut se mettre sous la forme (3) :

$$\frac{d}{dt}R = \pm\sqrt{\frac{8\pi G\rho R^2}{3} - k} \tag{3}$$

Dans le cas ou R est très petit, cas correspondant aux premiers instants de l'univers, le terme ρR^2 tend vers l'infini et l'on peut négliger la valeur k :

$$\frac{d}{dt}R = \pm\sqrt{\frac{8\pi G\rho R^2}{3}} \tag{4}$$

Cette équation va être importante par la suite pour décrire l'évolution temporelle des valeurs R, T et ρ.

De l'équation (2), nous pouvons déduire une équation de conservation d'énergie sous la forme (5) :

$$E = \frac{1}{2}m\dot{R}^2 - \frac{GMm}{R} \tag{5}$$

En dérivant (5) on obtient (6), en tenant compte que l'énergie E du corps est une constante :

$$\dot{R}\frac{d^2}{dt^2}R = -\dot{R}\frac{GM}{R^2} + \frac{G}{R}\frac{d}{dt}M \tag{6}$$

La dérivée première de la masse apparue dans cette équation peut être obtenue en utilisant l'équivalence masse-énergie et la conservation locale de l'énergie, ce qui nous donne l'équation (7):

$$\frac{d}{dt}M = -4\pi R^2 p\frac{d}{dt}R \tag{7}$$

où p représente la pression. En introduisant (7) dans (6) on obtient la deuxième équation des cosmologies :

$$\frac{1}{R}\frac{d^2}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \tag{8}$$

En cherchant une expression pour la variation de l'énergie totale, soit une variation de ρR^3, nous pouvons écrire l'équation (9) en manipulant l'équation (2) et l'équation (8), qui exprime la conservation d'énergie :

$$\frac{d}{dR}(\rho R^3) + 3pR^2 = 0 \tag{9}$$

Nous pouvons maintenant obtenir explicitement une relation entre R et ρ, à condition de trouver une équation d'état entre p et ρ. Cette équation va dépendre de l'état de l'univers étudié. Nous sommes donc conduit à différencier les cas suivants :

2.1.1 Univers dominé par le rayonnement

Dans le cas d'un univers dominé par le rayonnement, l'équation d'état est donnée par (10) :

$$p = \frac{1}{3}\rho \tag{10}$$

En introduisant (10) dans l'équation de conservation d'énergie (9), on obtient, après manipulations, les relations de proportionnalité suivantes:

$$\rho_\gamma \sim R^{-4} \tag{11}$$

$$R \sim T^{-1} \tag{12}$$

Où ρ_γ représente la densité de photons. En utilisant l'équation (4) issue de la première équation des cosmologies, nous obtenons les dépendances temporelles pour R, T et ρ_γ :

$$R \sim t^{\frac{1}{2}} \tag{13}$$

$$T \sim t^{-\frac{1}{2}} \tag{14}$$

$$\rho_\gamma \sim t^{-2} \tag{15}$$

2.1.2 Univers dominé par la matière

Dans le cas d'un univers dominé par la matière, les interactions entre la matière peuvent être supposées nulles (pas d'interactions entre galaxies), ce qui nous conduit à poser la pression égale à zéro. L'équation de conservation (9) nous amène à la relation suivante :

$$\rho_m \sim R^{-3} \tag{16}$$

Où ρ_m représente la densité de matière. Nous pouvons comme précédemment à partir de (4) écrire les dépendances temporelles :

$$R \sim t^{\frac{2}{3}} \tag{17}$$

$$\rho_m \sim t^{-2} \tag{18}$$

2.1.3 Univers avec matière et rayonnement en équilibre thermodynamique

Dans ce cas, la pression et la densité d'énergie peuvent s'exprimer en fonction de la température T par les relations (19) et (20):

$$p = nk_BT + \frac{1}{3}aT^4 \tag{19}$$

$$\rho = nmc^2 + \frac{1}{\gamma - 1} nk_B T + aT^4 \tag{20}$$

où n représente la densité de matière, m la masse d'une particule. L'équation de conservation d'énergie (9) nous permet d'établir les relations suivantes :

$$R \sim T^{-1} \tag{21}$$

Les dépendances temporelles sont identiques au cas d'un univers dominé par le rayonnement :

$$R \sim t^{\frac{1}{2}} \tag{22}$$
$$T \sim t^{-\frac{1}{2}} \tag{23}$$
$$\rho \sim t^{-2} \tag{24}$$

2.1.4 Univers avec matière et rayonnement découplés

Le découplage s'exprime comme si la constante a, dans (19) et (20) tendait vers la valeur zéro, c'est-à-dire que le terme dû au rayonnement n'a plus d'effet sur la matière. Les températures du rayonnement et de la matière ne sont plus égales et nous noterons T_m et p_m la température et la pression de la matière. Les relations (19) et (20) deviennent :

$$p_m = nk_B T_m \tag{25}$$

$$\rho_m = nmc^2 + \frac{1}{\gamma - 1} nk_B T_m \tag{26}$$

L'équation de conservation d'énergie (9) nous permet d'établir la relation de proportionnalité suivante :

$$R \sim T_m^{-1} \tag{27}$$

nous pouvons en tirer les dépendances temporelles :

$$R \sim t^{\frac{1}{2}} \tag{28}$$
$$T_m \sim t^{-\frac{1}{2}} \tag{29}$$
$$\rho_m \sim t^{-2} \tag{30}$$

Remarque : les relations développées ci-dessus nous conduisent rapidement à des résultats simples mais grossiers. Pour affiner la description, il faudrait écrire une équation du type (8) en différenciant les densités de chacun des types de particules (photons, électrons, neutrinos et baryons). Une température propre à chaque particules doit être considérée, pour tenir compte des découplages propres à chaque type de particules. Pour plus de dt́ails, le lecteur est invité à consulter le livre de Weinberg [1].

2.2 Le calendrier primordial

Les équations développées au paragraphe précédent nous permettent maintenant d'exposer dans les grandes lignes l'histoire d'un univers de Friedmann.

2.2.1 Phase hadronique

Après le Big Bang initial, l'univers se retrouve à une température suprérieure à 10^{13} K. Cette période extrêmement brêve est marquée par la rupture de symétrie (violation du principe cosmologique) qui a laissé un surplus de matière par rapport à l'anti-matière.

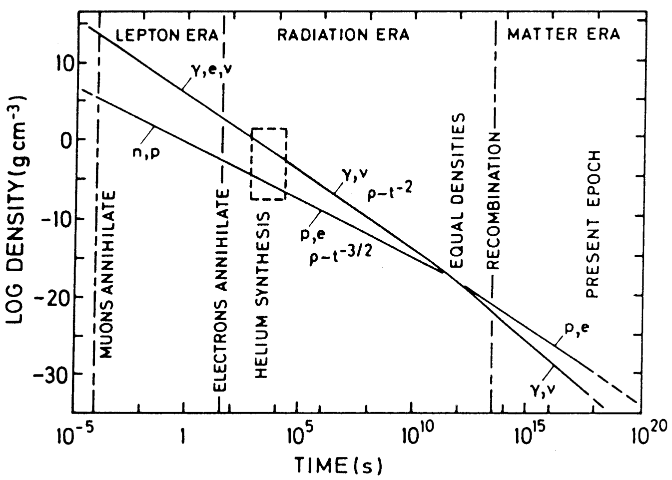

Figure 1: L'histoire thermique du modèle standard. Les densités des protons, photons et neutrinos sont données pour différentes époques de l'évolution cosmologique [5].

2.2.2 Phase leptonique

L'univers s'est déjà refroidit et se retrouve à la température de 10^{12} K. On y trouve de nombreuses particules telles que des photons, des leptons, des mesons et des baryons ainsi que leurs antiparticules, toutes en équilibre thermodynamique. Les protons et neutrons apparaissaient bientôt en très légère quantité mais en nombres égaux.

Pour une température plus faible que 10^{12} K, les μ^+ et μ^- commencent à s'anhilier jusqu'à une température de 1.3×10^{11} K. A ce moment les neutrinos et antineutrinos se découplent des autres particules et abaissent leur température légèrement plus rapidement que les autres particules, toujours en équilibre thermodynamique, qui suivent la relation (21).

En dessous de 10^{11} K, les neutrons et protons sont sujets aux interactions faibles :

$$\begin{aligned}
n + \nu &\rightarrow p + e^- \\
n + e^+ &\rightarrow p + \overline{\nu} \\
n &\rightarrow p + e^- + \overline{\nu} \\
p + e^- &\rightarrow n + \nu \\
p + \overline{\nu} &\rightarrow n + e^+
\end{aligned}$$

$$p + e^- + \overline{\nu} \rightarrow n \tag{31}$$

La différence de masse entre les deux particules va provoquer un surplus de protons en suivant une distribution de Maxwell.

En dessous de 5×10^9 K, on assiste aux anhilations entre électrons et positrons, qui laisseront un surplus d'électrons, ce qui assurera la neutralité de l'univers. En conséquence, ajoutée au fait que les neutrinos se sont refroidis, la disparition des électrons et positrons empèche les interactions faibles entre protons et neutrons, ce qui va geler la proprotion entre ces particules au rapport suivant :

$$\frac{n_n}{n_p} = 0.135 \tag{32}$$

L'univers n'est alors constitué plus que de photons, neutrinos, antineutrinos et de quelques nucléons. On parle alors d'un univers dominé par le rayonnement.

2.2.3 Phase radiative

A la température de environ 5×10^9 K, l'énergie par photon devient suffisemment faible pour permettre la fusion des nucléons qui vont constituer les premiers atomes légers, c'est le début de la nucléosynthèse cosmologique. La température reste cependant suffisante pour ioniser le gaz de matière.

2.2.4 Phase matérielle

Comme ρ_γ décroit plus rapidement que ρ_B, conformément aux relations (11) et (16), on assiste au moment où l'univers qui était jusqu'à présent dominé par le rayonnement devient dominé par la matière ($\rho_m > \rho_\gamma$). Cet instant se situe à une température de 3000 K, soit environ cinq cent mille ans après le Big Bang. La figure 1 illustre bien le passage entre les deux type d'univers. Cette époque, où la température est proche de la température d'ionisation de l'hydrogène, est marquée également par la recombinaison des atomes d'hydrogène. L'univers devient alors transparent, les électrons libres empêchant auparavant les photons de se déplacer librement sans interaction. Ces photons maintenant libérés sont à l'origine du rayonnement fossile à 2.7 K.

Les années futures laisseront place aux premières condensations matérielles, galaxies et formations stellaires,...

3 Nucléosynthèse primordiale

Dans cette section nous présenterons plus en détails la période de l'histoire de l'univers qui a permis la synthèse des premiers éléments légers. Nous discuterons également les paramètres utiles à une description mathématique en vue d'une application numérique.

3.1 Description générale

Comme nous l'avons vu précédemment, pour des températures supérieures à 3×10^9 K, les neutrons et protons interagissent par l'intermédiaire de la force faible selon (31). La variation de la fraction de masse des neutrons peut ainsi s'écrire :

$$\frac{d}{dt}X_n = -\lambda(n \to p)X_n + \lambda(p \to n)X_p \tag{33}$$

où $\lambda(n \to p)$ et $\lambda(p \to n)$ représentent respectivement les taux des réactions de transformation de neutrons, (resp. protons) en protons, (resp. neutrons). Pour une température supérieure à 3×10^{10} K, l'équation précédente nous permet de montrer que les neutrons et protons sont en équilibre thermodynamique. La distribution de fraction de masse est ainsi donnée par une distribution de Maxwell-Boltzmann :

$$\frac{X_n}{X_p} = e^{\frac{Q}{k_b T}} \tag{34}$$

avec $Q = m_n - m_p = 1.293$ MeV, la différence de masse entre neutrons et protons. Au fure et à mesure que la température diminue, on verra donc apparaître un excès de protons. En dessous de 3×10^{10} K, l'équilibre thermodynamique est rompu, et l'évolution de la fraction de masse du neutron ne peut se déduire que par intégration numérique de (33). Les calculs de Peebles [7] nous donnent une valeur de $X_n = 0.164$ pour une température de 3×10^9 K. A cette température, seule la désintégration-β contribue à la variation des neutrons. Le rapport entre neutrons et protons devient plus stable, c'est ce qu'on appelle le "freeze-out". A cette période, le rayonnement devient suffisamment faible pour permettre la formation des premiers noyaux légers. Il faudra cependant attendre une température entre 2 et 1×10^9 K pour que la réaction de photodissociation de l'hélium devienne suffisemment faible pour réellement parler de nucléosynthèse. La production des éléments se fait initialement par des réactions à deux corps. Dans un premier temps, le deutérium est formé par la fusion d'un proton et d'un neutron :

$$p + n \leftrightarrow d$$

Une fois le deutérium créé, les réactions suivantes peuvent se déclancher :

$$\begin{aligned} d + n &\leftrightarrow T \\ d + p &\leftrightarrow He^3 \\ d + d &\leftrightarrow He^3 + n \end{aligned}$$

on en arrive ainsi à la production d'hélium :

$$\begin{aligned} T + n &\leftrightarrow He^4 \\ He^3 + n &\leftrightarrow He^4 \\ T + p &\leftrightarrow He^4 \end{aligned}$$

Par la suite, les portes sont ouvertes pour la création d'autres éléments de plus en plus lourds.

La section suivante présente en détail les réactions considérées dans ce travail, ainsi que les noyaux synthétisés.

3.2 Evolution temporelle

3.2.1 Evolution de la température

Comme nous l'avons dit dans le paragraphe précédent, la période de la nucléosynthèse cosmologique est caractérisée par un univers où le rayonnement et la matière sont en équilibre thermodynamique. La relation (22) obtenue dans le paragraphe précédent nous donne la relation entre le temps et la température.

$$t = \frac{\theta}{T^2} \tag{35}$$

La constante de proportionnalité θ est donnée par Esmailzadeh & al. (1991) [2] :

$$\theta = \begin{cases} 9.96 & T_9 > 5 \\ 178 & T_9 < 1 \end{cases} \tag{36}$$

L'origine est la discussion des valeurs sont exposées dans Weinberg [1].

3.2.2 Evolution de la densité de baryons

Comme nous le verrons dans la section 4, page 14, les taux de réactions sont proportionnels à la densité de baryon ρ_B qui dépend de la température, par une relation du type (1). Nous allons dans cette partie essayer de dériver cette dépendance.

Introduisons la variable η comme la fraction du nombre de baryons par unité de volume n_B par rapport au nombre de photons par unité de volume n_γ

$$\eta = \frac{n_B}{n_\gamma} \tag{37}$$

Après la séquence d'annihilation des électrons et positrons, ce rapport reste constant et nous pouvons donc considérer η comme une constante. En particulier, il est possible d'estimer la valeur de η si nous connaissons les densités n_B et n_γ pour l'univers actuel, notés alors n_{0B} et $n_{0\gamma}$. La densité baryonique est, comme nous le verrons difficile à estimer, nous garderons tout de même pour la suite des calculs, l'estimation suivante :

$$n_{0B} \cong 2.8 \times 10^{-7} \frac{baryons}{cm^3} \tag{38}$$

La densité de photons en fonction de la température est donnée par la relation suivante :

$$\begin{aligned} n_\gamma &= 0.37 \frac{a}{k_B} T^3 \frac{photons}{cm^3} \\ &= 2 \times 10^{28} T_9^3 \frac{photons}{cm^3} \end{aligned} \tag{39}$$

où a est une constante connue et k_B la constante de Boltzmann. Pour une température de 3 K, nous obtenons la valeur suivante :

$$n_{0\gamma} = 540 \, \frac{photons}{cm^3} \tag{40}$$

On en déduit immédiatement la valeur du rapport :

$$\eta = 5.18 \ \times \ 10^{-10} \tag{41}$$

Exprimons maintenant la densité de masse de baryons en fonction de la constante η de la densité de photons et de la masse d'un nucléon m_n :

$$\rho_B = \eta n_\gamma m_n \tag{42}$$

En susbstituant η et ρ_γ par leurs valeurs (41) et (39), on obtient finalement la variation en fonction de la température :

$$\rho_B \cong 1.7 \ \times \ 10^{-5} T_9^3 \, \frac{baryons}{cm^3} \tag{43}$$

Dans ce paragraphe, nous introduirons encore des grandeurs utiles en cosmologie. La densité critique ρ_c permet de fixer une limite entre un univers ouvert, cas où la densité de l'univers serait inférieure à cette limite, d'un univers fermé où la densité serait supérieure. Cette valeur s'obtient aisément de la première équation des cosmologies (2) :

$$\rho_c = \frac{3H^3}{8\pi G} \tag{44}$$

avec H, la contante de Hubble donnée par $H = \frac{\dot{R}}{R}$. En définissant $h_0 = \frac{H}{50}$ avec H en $\frac{km}{sMpc}$, la densité critique vaut :

$$\rho_c = h_0^2 \ \times \ 10^{-29} \, \frac{g}{cm^3} \tag{45}$$

Pour caractériser la contribution de la matière barionique, nous définissons :

$$\Omega_B = \frac{\rho_B}{\rho_c} \tag{46}$$

Une autre manière d'exprimer la densité de baryons et de la faire en fonction de $\Omega_{B0} h_0^2$, on obtient ainsi en utilisant (46) (45), et (43):

$$\begin{aligned} \rho_B &= \frac{\rho_{0B}}{\rho_c} \frac{\rho_c}{\rho_{0B}} \rho_B && (47) \\ &= \frac{n_\gamma}{n_{0\gamma}} \Omega_{B0} h_0^2 T_9^3 && (48) \\ &= 3.7 \ \times \ 10^{-4} \Omega_{B0} h_0^2 T_9^3 && (49) \end{aligned}$$

3.3 Paramètres de la nucléosynthèse

- **rapport η :** De ce paramètre est issue la valeur de ρ_B en fonction de la température. C'est la grandeur sur laquelle reposent le plus d'incertitudes. Il existe plusieurs méthodes pour la mesurer, mais les résultats demeurent incertains d'une part par les incertitudes liées à la matière sombre et d'autre part la composition de cette même matière (baryonique ou non baryonique). L'effet sur la nucléosynthèse de l'augmentation de η est de faire croître l'abondance d'hélium.

- **temps de vie du neutron : τ :** Ce paramètre va être déterminant pour fixer le rapport de densité de masse entre proton et neutron lors du "freeze-out". Un temps de vie élevé va conduire plus rapidement au "freeze-out", en conséquence, la proportion de neutrons sera plus élevée ce qui conduira finalement à une abondance d'hélium plus élevée. Actuellement, τ est estimé à 887 ± 2 s, selon Bernett & al. 1996 [10].

- **nombre d'espèces de neutrinos N_ν :** La valeur de ce nombre influence le taux d'expansion de l'univers. Plus N_ν est grand, plus le taux est rapide, moins long est le temps écoulé avant le "freeze-out", et donc plus grand sera le rapport entre neutrons et protons, ce qui conduira finalement à une abondance plus élevée d'élium. Ce nombre est toutefois maintenant bien connu des physiciens des particules, et est fixé à trois.

4 Le réseau minimal

Dans ce chapitre, nous allons dans un premier temps introduire les notations et les équations que nous utiliserons par la suite. Dans un deuxième temps, nous présenterons le réseau de réactions utilisé.

4.1 Equations des abondances

4.1.1 Réaction à deux corps

Dans ces réactions [1], l'élément k est créé à partir d'une réaction entre les éléments i et j. L'équation pour la variation d'abondance de k est donnée par la relation (50)

$$\frac{d}{dt}n_k = n_i n_j \langle\sigma\nu\rangle_{ij\to kl} \tag{50}$$

où n_k, n_i, n_j représentent le nombre de particules de types k, i, j par unité de volume, soit $[n_k] = \frac{1}{cm^3}$, et $\langle\sigma\nu\rangle_{ij\to kl}$ est la moyenne de la section efficace de Bolzmann pour la réaction $ij \to kl$, et on a alors $[\langle\sigma\nu\rangle_{ij\to kl}] = \frac{cm^3}{s}$. On introduit également la densité réduite, sans dimention pour l'élément k par la relation :

$$Y_k = \frac{n_k}{n_B} \tag{51}$$

où n_B représente le nombre de baryons par unité de volume. En utilisant la densité réduite, l'équation (50) devient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Y_k &= Y_i Y_j n_B \langle\sigma\nu\rangle_{ij\to kl} \\ &= Y_i Y_j [ij \to kl] \end{aligned} \tag{52}$$

où les unités de $[ij \to kl]$ sont des s^{-1}. Dans certains cas, on introduit la fraction de masse (sans dimention), selon la relation suivante :

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{A_k n_k}{\rho_B N_A} \\ &= A_k Y_k \end{aligned} \tag{53}$$

où A_k représente le nombre de nucléons dans le noyau k. Remarquons encore que de ces définitions, on a :

$$\sum_k X_k = 1 \tag{54}$$

On peut également en écrire une équation pour la variation de la fraction de masse en partant de (50) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{X_k}{A_k} &= \frac{X_i}{A_i}\frac{X_j}{A_j}\rho_B N_A < \sigma\nu >_{ij\to kl} \\ &= \frac{X_i}{A_i}\frac{X_j}{A_j}[ij \to kl] \end{aligned} \tag{55}$$

[1] les notations sont celles utilisées par Esmailzadeh & al. (1991) [2]

4.1.2 Désintégration

Dans le cas d'une désintégration, la variation de la densité d'une particule k s'écrit :

$$\frac{d}{dt}n_k = -\frac{n_k}{\tau_k} \tag{56}$$

où τ_k est appelé demi-vie de la particule k, avec comme unité des cm^{-1}. En introduisant la densité réduite comme en (51), l'équation (56) devient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Y_k &= -\frac{Y_k}{\tau_k} \\ &= -Y_k\lambda_k \end{aligned} \tag{57}$$

où λ_k est l'inverse du temps de vie.

4.1.3 Photodissociation

Dans le cas d'une photodissociation, la variation de la densité d'une particule k s'écrit :

$$\frac{d}{dt}n_k = -n_k\lambda_k \tag{58}$$

où λ_k à la même dimension que dans l'équation (57), et représente une probabilité de dissociation de la particule k. En introduisant la densité réduite, l'équation (58) devient :

$$\frac{d}{dt}Y_k = -Y_k\lambda_k \tag{59}$$

4.2 Réseau minimal

Par réseau minimal, nous entendons ici le réseau de réactions simplifié que nous avons utilisé pour nos applications numériques. Ce réseau est celui proposé par Esmailzadeh & al. [2]. Les taux de réactions sont tirés de Wagoner & al. [3]. Les notations sont les suivantes : nous utilisons le symbol n pour le neutron, d pour le deutérium, 3 pour l'hélium 3, T pour le tritium, 6 pour le litium 6, 7 pour le litium 7, B pour le bérilium 7, α pour l'hélium 4 et p pour le proton.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}Y_n &= \frac{1}{2}Y_dY_d[ddn3] + Y_dY_T[dTn\alpha] + Y_pY_T[pTn3] + Y_d[d\gamma np] \\
&\quad -Y_nY_p[npd\gamma] - Y_nY_3[n3Tp] - Y_n[n] \\
\frac{d}{dt}Y_d &= Y_nY_p[npd\gamma] - Y_dY_d[ddpT] - Y_dY_d[ddn3] - Y_dY_T[dTn\alpha] \\
&\quad -Y_dY_3[d3p\alpha] - Y_d[d\gamma np] - Y_dY_p[dp3\gamma] \\
\frac{d}{dt}Y_3 &= Y_dY_p[pd3\gamma] + Y_TY_p[pTn3] + \frac{1}{2}Y_dY_d[ddn3] - Y_dY_3[d3p\alpha] \\
&\quad -Y_nY_3[n3pT] \\
\frac{d}{dt}Y_T &= Y_nY_3[n3pT] + \frac{1}{2}Y_dY_d[ddpT] - Y_dY_T[dTn\alpha] - Y_pY_T[pTn3] \\
&\quad -Y_pY_T[pT\gamma\alpha] \\
\frac{d}{dt}Y_6 &= Y_dY_\alpha[d\alpha6\gamma] - Y_nY_6[n6\alpha T] - Y_pY_6[p63\alpha]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}Y_7 &= Y_nY_6[n67\gamma] + Y_nY_B[nBp7] + Y_TY_\alpha[T\alpha7\gamma] - Y_pY_7[p7\alpha\alpha] \\
&\quad -Y_nY_7[n78\gamma] \\
\frac{d}{dt}Y_B &= Y_pY_6[p6B\gamma] + Y_3Y_\alpha[3\alpha B\gamma] - Y_B[B\gamma3\alpha] - Y_nY_B[nBp7] \\
&\quad -Y_pY_B[pB\gamma8] - Y_dY_B[dB\alpha\alpha p] \\
\frac{d}{dt}Y_\alpha &= Y_dY_3[d3p\alpha] + Y_nY_3[n3\alpha\gamma] + Y_dY_T[dTn\alpha] + Y_pY_T[pT\gamma\alpha] \\
\frac{d}{dt}Y_p &= \frac{1}{2}Y_dY_d[ddpT] + Y_d[d\gamma np] + Y_nY_3[n3pT] + Y_dY_3[d3p\alpha] \\
&\quad +Y_n[n] \\
&\quad -Y_pY_T[pTn3] - Y_nY_p[npd\gamma] - Y_dY_p[pd3\gamma] - Y_pY_T[pT\gamma\alpha]
\end{aligned}
$$

5 Résolution numérique

Nous présentons dans cette partie deux méthodes numériques, utilisées pour résoudre le réseau minimal de réactions nucléaires.

5.1 Résolution par linéarisation

La méthode décrite ci-dessous a été proposée en 1969 par Arnett & Truran [6].

5.1.1 Réactions à deux corps

Pour déterminer l'évolution des densités réduites comme définies en (51), nous sommes conduits à résoudre un système d'équations du type (52) :

$$\frac{d}{dt}Y_k(t) = Y_i(t)Y_i(t)[ij \to kl](t) \tag{60}$$

où k balaye les éléments considérés dans le réseau minimal. La méthode numérique consiste à effectuer des itérations sur le temps. Entre deux itérations, le temps t se verra accru d'un petit temps Δt. L'équation s'écrira alors :

$$\frac{d}{dt}Y_k(t+\Delta t) = Y_i(t+\Delta t)Y_j(t+\Delta t)[ij \to kl](t+\Delta t) \tag{61}$$

L'idée est de pouvoir calculer $\frac{d}{dt}Y_k(t+\Delta t)$ en fonction de $Y_i(t)$ et de $Y_j(t)$ connu de l'itération précédente, en profitant du faible taux d'accroissement de t. Ceci est faisable en linéarisant l'équation (61). En effet, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} Y_i(t+\Delta t) &= Y_i(t) + \Delta_i && (62) \\ Y_j(t+\Delta t) &= Y_j(t) + \Delta_j && (63) \\ & && (64) \end{aligned}$$

où on a défini :

$$\begin{aligned} \Delta_i &= Y_i(t+\Delta t) - Y_i(t) && (65) \\ \Delta_j &= Y_j(t+\Delta t) - Y_j(t) && (66) \end{aligned}$$

l'équation (61) devient :

$$\frac{d}{dt}Y_k(t+\Delta t) = (Y_i(t)+\Delta_i)(Y_j(t)+\Delta_j)[ij \to kl](t+\Delta t) \tag{67}$$

en effectuant le produit et en négligeant le terme quadratique $\Delta_i\Delta_j$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Y_k(t+\Delta t) &\cong (Y_i(t)Y_j(t) + \Delta_i Y_j(t) + \Delta_j Y_i(t))[ij \to kl](t+\Delta t) \\ &\cong (-Y_i(t)Y_j(t) + Y_i(t+\Delta t)Y_j(t) \\ &\quad + Y_j(t)Y_i(t+\Delta t))[ij \to kl](t+\Delta t) && (68) \end{aligned}$$

Le terme $\frac{d}{dt}Y_k(t+\Delta t)$ peut également se décomposer en deux, de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Y_k(t+\Delta t) &\cong \frac{d}{dt}Y_k(t) \\ &= \frac{Y_k(t+\Delta t) - Y_k(t)}{\Delta t} && (69) \end{aligned}$$

Finalement, en arrangeant les termes de (68) et de (69) on obtient :

$$\begin{aligned} & Y_k(t+\Delta t) \\ & +Y_i(t+\Delta t)(-\Delta t Y_j(t)[ij \rightarrow kl](t+\Delta t)) \\ & +Y_j(t+\Delta t)(-\Delta t Y_i(t)[ij \rightarrow kl](t+\Delta t)) = Y_k(t) - \Delta t Y_i(t) Y_j(t) \end{aligned} \tag{70}$$

Pour k balayant tous les éléments, ceci revient à résoudre un système linéaire non homogène du type :

$$BY(t+\Delta t) = A \tag{71}$$

où B est une matrice connue, dont les éléments sont des fonctions de $Y_i(t)$, de $Y_j(t)$ et de $[ij \rightarrow kl](t+\Delta t)$ et A est un vecteur connu fonction des mêmes variables que B.

5.1.2 Désintégration et photodissociation

Ces deux modes de réaction obéissent à la même équation du type (57) et (58).

$$\frac{d}{dt} Y_k(t) = -Y_k(t)\lambda_k(t) \tag{72}$$

On écrit également une équation pour le pas suivant :

$$\frac{d}{dt} Y_k(t+\Delta t) = -Y_k(t+\Delta t)\lambda_k(t+\Delta t) \tag{73}$$

en décomposant $\frac{d}{dt} Y_k(t+\Delta t)$ comme en (69), on obtient l'arrangement suivant :

$$Y_k(t+\Delta t)(1 - \Delta t \lambda_k(t+\Delta t) = Y_k(t) \tag{74}$$

qui se met également sous la forme de (71).

Remarquons finalement que la valeur de t est reliée à la température T par la relation (35). Il est alors possible d'exprimer la variable t par la variable T, ce qui sera utile pour le programme qui effectue des itérations non pas sur le temps mais sur la température. Les grandeurs dépendant de t dépendront de T, et celles dépendant de $t + \Delta t$ dépendront de $T + \Delta T$. La valeur de la variable Δt sera quant à elle donnée par l'équation :

$$\Delta t = t(T+\Delta T) - t(T) = \frac{\theta}{(T+\Delta T)^2} - \frac{\theta}{T^2} \tag{75}$$

où ΔT est le pas "d'accroissement" de la température.

5.1.3 Limite de la méthode

Dans le cas où l'accroissement d'abondance d'un élément est particulièrement fort, la linéarisation peut conduire à des résultats erronés. Sans rentrer dans les détails, il faut imposer au pas d'accroissement de temps Δt la restriction suivante :

$$\Delta t < \frac{1}{\tau} \tag{76}$$

où τ représente le temps de vie dans les photodissociations ou désintégrations, et est donné par :

$$\tau_k = Y_i[ki \rightarrow jl] \tag{77}$$

dans le cas des réactions à deux corps. On en déduit donc que pour utiliser cette méthode dans le cas de réactions violentes, le pas de temps doit parfois être très faible.

5.2 Résolution par mise à l'équilibre

Cette méthode vient compléter la première, dans le cas où la méthode précédente exige un pas de temps trop faible.

Dans ce cas, il faut supprimer l'équation (ou les équations) du style (60) ou (72) dans lesquelles la condition (76) n'est pas respectée. Nous discuterons le cas où une seule équation (pour l'abondance Y_k) pose problème. L'extention à la suppression de plusieurs équations est identique.

L'idée est de résoudre le réseau diminué d'une équation par la méthode de linéarisation, en supposant que la valeur de Y_k est à l'équilibre durant le pas Δt (Y_k =cte.). Le calcul nous donne la valeur de toutes les abondances exceptée la $k^{ème}$. Celle-ci est déduite en posant le terme $\frac{d}{dt}Y_k$ égal à zéro dans (60). La valeur de Y_k devient alors une fonction $f(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ des autres abondances.

Nous pouvons maintenant résoudre à nouveau le réseau diminué en tenant compte de la nouvelle valeur de Y_k, ce qui va affiner les valeurs. De la fonction f nous déduirons également une meilleure valeur de Y_k. Ces itérations se poursuivent jusqu'à ce que la différence pour les abondances entre deux pas devient inférieure à une certaine tolérance. L'algorithme se poursuit en augmentant la valeur de la température d'un pas ΔT.

6 Programmation

6.1 Notations

Pour simplifier la programmation, nous avons numéroté les éléments de 1 à neuf. La correspondance est donnée par la figure 2.

$$\begin{aligned} n &\longrightarrow 1 \\ d &\longrightarrow 2 \\ T &\longrightarrow 3 \\ He^3 &\longrightarrow 4 \\ He^4 &\longrightarrow 5 \\ Li^6 &\longrightarrow 6 \\ Li^7 &\longrightarrow 7 \\ Be^7 &\longrightarrow 8 \\ p &\longrightarrow 9 \end{aligned}$$

Figure 2: Numérotation des éléments dans le programme principal

Les taux de réaction sont numérotés, selon l'ordre présenté dans Esmailzadeh & al. (1991) [2], et donnés dans l'appendice A.

6.2 Programme principal : `main_taux`

Ce programme se divise en deux parties : le programme principal et une sous-routine qui délivre les taux en fonction de la température.

6.2.1 Déclaration des variables

Nous présenterons ici uniquement les variables qui ont une importance particulière.

1. **variables** `integer, parameter`
   - **nbr** : représente le nombre d'éléments à suivre (9 dans le cas présent).
2. **variables** `double precision`
   - **dt** : représente le pas de température.
   - **t_finale**, **t_init** : correspondent respectivement à la température finale et initiale choisie.
   - **ds** : représente le pas de temps.
   - **teta1**, **teta2** : représentent les deux valeurs de la constante θ reliant la température au temps selon (35).
   - **tetatrans** : correspond à la température de transition entre `teta1` et `teta2` donnée par (36).

- **somme** : contient la somme des fractions de masse de tous les éléments. Elle doit être égale à 1 pour vérifier la conservation de la masse.
- **t** : représente la température. C'est la variable sur laquelle sont effectuées les itérations.
- **r** : représente la densité de baryons, fonction de la température.

3. **variables** `double precision, dimension(nbr,nbr+1)`
   - **b** : cet objet représente la matrice carrée 9×9 qui devra être inversée. La dixième collonne contient l'élément inhomogène de l'équation (71).
4. **variables** `double precision, dimension(nbr)`
   - **y** : ce vecteur de 9 éléments contient les abondances réduites des éléments à suivre, définis sous (51). La numérotation des éléments est donnée au pragraphe 6.1, page 20.
   - **x** : ce vecteur de 9 éléments contient les fractions de masse des éléments, comme défini en (53).
   - **m** : contient la masse atomique de chaque élément.
5. **variables** `double precison, dimension(30)`
   - **taux** : cette variable contient les taux comme défini en (52) des 30 réactions nucléaires constituant le réseau minimal.

6.2.2 Lecture des paramètres et écriture des resultats

Les paramètres modifiables du programme sont stockés dans le fichier `source.taux`. La variable `source_fichier` représente ce fichier dans le programme.

Les résultats sont stockés dans les fichiers `y.list1`, `x.list1`, `y.list2`, `x.list2`, `y.list3`, `x.list3`, et sont représentés par les variables `y_fichier1`, ..., `x_ficher3`. Au début du programme, ces fichiers sont ouverts (commande `open`), et le curseur est amené au début du fichier (commande `rewind`). Le fichier source est lu pour afficher à l'utilisateur les derniers paramètres utilisés. L'utilisateur peut les changer à sa guise, en indiquant le numéro du paramètre selon la liste. Un "`0`" donne l'ordre du démarrage des calculs.

A chaque itération de la boucle principale, les valeurs numériques obtenues sont stockées dans les fichiers appropriés.

6.2.3 Initialisation

Avant le début de la boucle principale, quelques variables sont initialisées :

- les variables `b` et `y` sont mises à zéro par mesure de précaution.
- les variables `m` sont initialisées en les égalant à la masse correspondante de chaque élément.
- les paramètres `y(1)` (abondance initiale du neutron), `y(9)` (abondance initiale du proton), `t_init`, `t_finale`, `dt`, `teta1`, `teta2` et `tetatrans` sont initialisées par rapport au contenu du fichier source.

6.2.4 Boucle principale

La boucle principale effectue des itérations sur la température selon les paramètres choisis, c'est-à-dire de `t_init` à `t_finale` par pas de `dt`.

A chaque boucle on effectue les opérations suivantes :

- la variable `r` prend sa valeur en fonction du cube de la température.
- la variable `ds`, léger accroissement de temps, prend sa valeur en fonction de l'accroissement de température `dt` selon la relation (75) avec :

$$\texttt{ds} \equiv \Delta t \text{ et } \texttt{dt} \equiv \Delta T$$

- la variable `teta` prend la valeur `teta1` ou `teta2` en fonction de la température.
- on appelle la sousroutine `sbrout_taux` décrite au paragraphe 6.4, page 24 qui, en fonction de la température et de la densité de baryon `r` retourne la valeur des 30 taux de réactions nucléaires stockés dans la variable `taux`.
- on rempli chaque élément de la matrice `b` en fonction des éléments de `y`, selon les équations (70) et (74).
- la procédure `girl` est appelée pour résoudre l'équation (71) en introduisant le résultat dans `y`.
- les résultats `y` et `x` sont écrits dans les fichiers de stockage de données.

La fin du programme consiste à écrire les résultats finaux dans un fichier selon la volonté de l'utilisateur. Les paramètres utilisés sont également enregistrés. On calcule finalement la variable `somme`, définie plus haut et on l'imprime pour vérification.

6.3 Variante : mise à l'équilibre

Une variante de la méthode utilisée dans le programme principal `main_taux` est la méthode discutée au paragraphe 5.2, page 19. Nous l'avons appliquée ici sur le deutérium et le bérilium. Les raisons pour lesquelles nous avons choisi ces deux éléments seront exposées plus loin.

Pour la programmation de cette variante, nous avons simplement modifié le programme `main_taux`. Les corrections sont les suivantes :

6.3.1 Déclaration des variables

- la matrice `b` de dimension `(nbre,nbre+1)` est remplacée par une matrice de dimension `(nbre-2,nbre-1)` en tenant compte du fait que le réseau ne contient plus 9 éléments (`nbr`) mais 7 (`nbr-2`).
- un vecteur `sol` de dimension `nbr-2` est rajouté pour contenir les solutions de la résolution du réseau minimal.

- dans les variables de type `double precision`, nous rajoutons les variables `ysto2` et `ysto8` qui permettrons de stocker la valeur des abondances du deutérium et du bérilium entre chaque itération. La variable `errlimit` correspondra à la tolérance d'erreur commise sur `y(2)` et `y(8)`, quant à la variable `err2`, `err8` et `err`, elles correspondent respectivement aux erreurs sur `y(2)`, `y(8)` et au maximum entre les deux.

6.3.2 Initialisation

- En plus des variables `y(1)` et `y(9)`, on initialise les valeurs `y(2)` et `y(8)` correspondant respectivement aux abondances de deutérium et de bérilium.
- On choisi la tolérance de l'erreur en initialisant la variable `errlimit`.

6.3.3 Boucle principale

Les deux différences principales par rapport à l'ancienne version sont l'incorporation d'une boucle secondaire dans la boucle principale, et le changement des équations attribuant les valeurs dans la matrice `b`. Pour des raisons de commodités, à la deuxième ligne de la matrice `b` ne correspond pas l'hélium 3 qui serait venu par décalage de tous les éléments, mais par le proton, ce qui permet d'éviter une renumérotation complète.

La boucle secondaire intervient juste avant le remplissage de la matrice `b`. Avant, il faut attribuer une valeur "élevée" (= 1) à la variable `err` pour que la boucle s'effectue au moins une fois. De plus, il faut égaler les variables `ysto2` et `ysto8` aux abondances `ysto2` et `ysto8` issues du pas précédent. La condition sur l'arrêt de la boucle est que l'erreur maximale `err` soit plus petite que la tolérance `errlimit`. A l'intérieur de la boucle secondaire, nous effectuons les opérations suivantes :

- remplissage de la matrice `b`, en fonction des nouvelles équations.
- appel de la sousroutine `girl` pour inverser la matrice `b` et mettre le résultat dans le vecteur `sol`.
- attribuer au vecteur `y` le vecteur `sol` en respectant la correspondance des composantes.
- exprimer la nouvelle valeur de `y(2)` en fonction des nouvelles valeurs `y(n)` pour n=1,3,4,5,6,7,9. La relation est déduite de l'équation régissant la variation du deutérium présentée au pragraphe 4.2, page 15, où l'on pose le terme $\frac{d}{dt}Y_d$ égal à zéro, conformément à la méthode de mise à l'équilibre (paragraphe 5.2, page 19). Y_d peut ainsi s'exprimer en résolvant une équation du deuxième ordre. Dans leur méthode analytique, Esmailzadeh & al. [2] suggèrent de supprimer le terme quadratique Y_dY_d petit par rapport aux autres. Y_d peut s'exprimer alors en fonction de l'équation suivante :

$$Y_d = \frac{Y_nY_p[npd\gamma]}{Y_T[dTn\alpha] + Y_3[d3p\alpha] + [d\gamma np] + Y_p[dp3\gamma]} \tag{78}$$

- exprimer la nouvelle valeur de `y(8)` en fonction des nouvelles valeurs `y(n)` et de la nouvelle valeur `y(8)`. La relation est déduite comme précédemment :
$$Y_8 = \frac{Y_p Y_6 [p6B\gamma] + Y_3 Y_\alpha [3\alpha B\gamma]}{[B\gamma 3\alpha] + Y_n [nBp7] + Y_p [pB\gamma 8] + Y_d [dB\alpha\alpha p]} \tag{79}$$

- calculer les différences entre les anciennes et les nouvelles valeurs de `y(2)` et de `y(8)`

- attribuer à la variable `err` le maximum entre `err1` et `err8`, qui sera confrontée à la tolérance.

- attribuer aux variables `ysto2` et `ysto8` leur correspondant fraîchement calculées.

La fin du programme est en tout point identique à l'ancienne version.

6.4 Sousroutine `sbrout_taux`

Cette sousroutine a pour but de fournir au programme principal les valeurs des taux de réactions nucléaires.

Toutes les variables sont définies comme des réels `double precision`. La variable `r` correspondant à la densité de baryons multiplie les taux des réactions à deux éléments pour rejoindre la définition (52) :

$$\texttt{taux(k)} \equiv [ij \to kl] = \rho_B N_A \langle \sigma \nu \rangle_{ij \to kl}$$

Le `taux(1)` correspondant à la désintégration du neutron correspond à la valeur τ définie en (57).

Les taux 28 et 30 correspondent aux réactions inverses de 2 et 17 respectivement. Comme ces taux sont engendrés par multiplication de `taux(2)` et `taux(17)`, ils doivent être divisés par `r`, pour satisfaire (59).

Le taux 29 correspond à la réaction inverse de 6. Cette réaction reste une réaction à deux corps, et donc, comme elle est engendrée par multiplication de `taux(6)`, elle ne doit pas être multipliée par `r`.

7 Résultats

Dans cette section, nous présenterons nos résultats obtenus avec les deux méthodes numériques proposées plus haut.

7.1 Méthode de linéarisation

Le tableau 1 nous présente les valeurs numériques obtenues pour une variation du paramètre η, à partir du programme exposé au paragraphe 6.2, page 20.

η	p	d	T	He_3
0.03×10^{-10}	0.96	1.6×10^{-2}	2.8×10^{-14}	3.8×10^{-6}
0.3×10^{-10}	0.83	4.1×10^{-3}	6.4×10^{-14}	3.5×10^{-6}
1.5×10^{-10}	0.76	4.0×10^{-4}	3.5×10^{-14}	3.5×10^{-7}
3.0×10^{-10}	0.75	1.3×10^{-4}	2.2×10^{-14}	1.3×10^{-7}
5.1×10^{-10}	0.75	5.3×10^{-5}	1.6×10^{-14}	7.2×10^{-8}
7.5×10^{-10}	0.75	2.7×10^{-5}	1.2×10^{-14}	5.2×10^{-8}
15×10^{-10}	0.74	6.0×10^{-6}	5.2×10^{-15}	2.7×10^{-8}
30×10^{-10}	0.73	4.7×10^{-7}	8.2×10^{-16}	8.1×10^{-9}
η	He_4	Li_6	Li_7	Be_7
0.03×10^{-10}	0.02	2.6×10^{-22}	4.0×10^{-21}	1.4×10^{-20}
0.3×10^{-10}	0.17	7.7×10^{-21}	1.1×10^{-18}	1.7×10^{-18}
1.5×10^{-10}	0.23	1.2×10^{-18}	4.9×10^{-18}	1.4×10^{-17}
3.0×10^{-10}	0.24	3.7×10^{-19}	2.3×10^{-17}	2.4×10^{-16}
5.1×10^{-10}	0.25	9.3×10^{-19}	3.0×10^{-16}	9.4×10^{-15}
7.5×10^{-10}	0.25	1.9×10^{-19}	1.1×10^{-15}	7.9×10^{-14}
15×10^{-10}	0.26	1.0×10^{-17}	7.2×10^{-16}	4.9×10^{-13}
30×10^{-10}	0.27	4.0×10^{-16}	5.6×10^{-18}	2.6×10^{-13}

Tableau 1: Abondances des éléments produits durant la nucléosynthèse en fonction du paramètre η, $T_0 = 3 \times 10^9$ k, $Y_{0n} = 0.164$, $\tau_n = 887$.

La figure 3 montre l'évolution des abondances en fonction de la température durant la nucléosynthèse primordiale. Cette figure est à comparer avec la figure 4 présentée par Wagoner & al. en 1967 [3].

A première vue, les tendances des courbes entre les deux graphiques semblent correspondrent assez bien. Les courbes des protons, neutrons, hélium 4 est deutérium sont quasiment identiques. Il existe cependant un détail gênant. Le premier élément formé à partir des nucléons est le deutérium, qui permettra ensuite l'apparition de l'hélium 4. Or sur la figure 3, nous constatons que très rapidement de l'hélium 4 est formé, alors que sur le graphique de Wagoner, celui-ci n'apparaît que plus tardivement.

Les résultats obtenus avec les éléments plus lourds, sont par contre catastrophiques. Les abondances que nous avons obtenues sont nettement inférieures, et différentes d'un facteur 100 au minimum pour l'hélium 3 à un facteur 10^8 dans le cas du tritium. Remarquons tout de même certaines similitudes entre les deux graphiques : le tritium passe par un maximum aux alentours de 10^9 K pour diminuer ensuite. Les reliefs du litium 7 et du bérilium 7 suivent dans les grandes lignes les mêmes tendances.

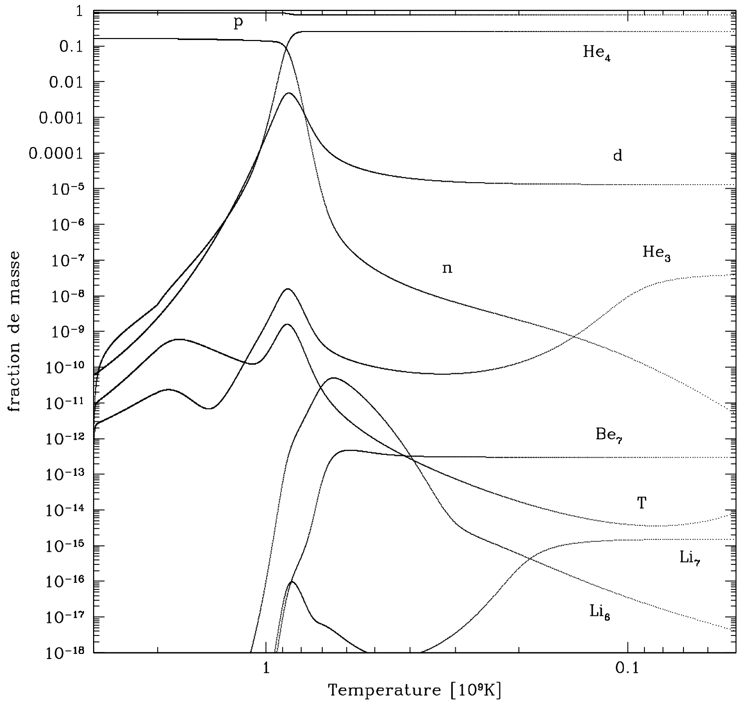

Figure 3: Abondances des éléments durant la nucléosynthèse en fonction de la température. Les valeurs sont obtenues avec la méthode de linéarisation, $h = 1.7 \times 10^{-5}$ $Y_{0n} = 0.164$, $\tau_n = 887$.

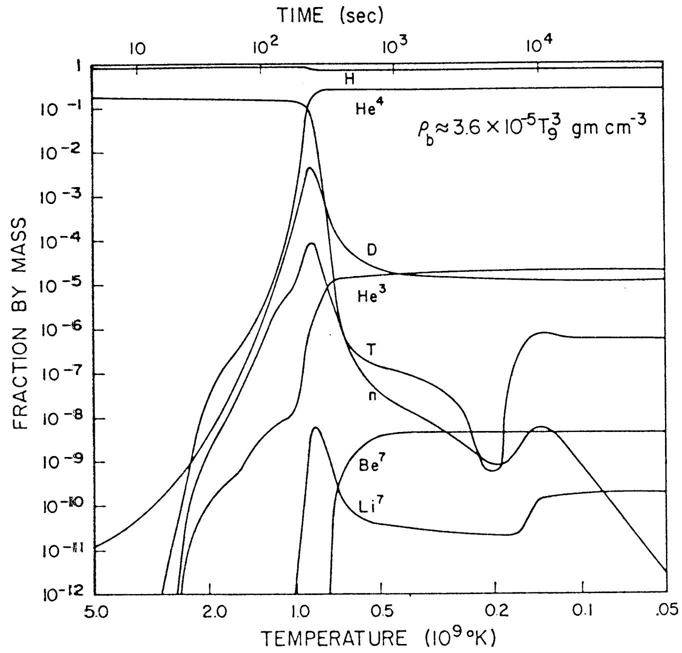

Figure 4: Abondances des éléments durant la nucléosynthèse en fonction de la température, calculées par Wagoner & al.[3], $h = 3.6 \times 10^{-5}$, $Y_{0n} = 0.164$, $\tau_n = 1013$.

Après examen détaillé du problème relatif à l'apparition de l'hélium 4 avant le deutérium nous avons constaté que la condition (76) énoncée au paragraphe 5.1.3, page 18 n'est pas respectée pour l'équation du deutérium et du bérilium. Plus précisément, en étudiant l'équation de la variation du deutérium, paragraphe 4.2, page 15, on peut constater que la photodissociation est suffisemment importante au début de la nucléosynthèse pour détruire instantanément le deutérium créé par fusion d'un neutron et d'un proton, ce qui conserve une abondance de deutérium à l'équilibre en faible quantité. La méthode procède par itérations. A la première itération, l'abondance de deutérium est nulle et seule la fusion proton neutron provoque son accroissement. A la deuxième itération, la photodissociation intervient et détruit massivement le deutérium. L'approximation linéaire effectuée sur un intervalle de temps trop long ne tient pas compte de la baisse continue de l'abondance du deutérium. Le programme transmet ainsi une valeur erronée, qui se répercute sur les autres éléments. La figure 5 illustre ce problème. Remarquons également que les tests effectués laissent apparaître un problème similaire dans la création du bérilium. En diminuant fortement la longueur des pas, le problème ne se pose plus. Il faudrait malheureusement plusieurs semaines de calculs pour obtenir un résultat. Il est toutefois possible de recourir à un procédé où l'on conserverait l'abondance du deutérium à l'équilibre proche de zéro, jusqu'à une certaine température critique, calculée analytiquement, où la photodissociation ne serait plus suffisante pour détruire totalement le deutérium.

Figure 5: Linéarisation de l'évolution de l'abondance du deutérium : au premier pas, seule la réaction de fusion entre neutrons et protons intervient. Au deuxième pas, la photodissociation détruit instantanément l'élément, la linéarisation effectuée sur un intervalle trop long conduit à des abondances négatives.

Dans les deux graphiques suivants, nous avons reporté d'une part l'abondance de l'hélium et d'autre part le rapport entre la densité réduite du deutérium sur la densité réduite de l'hydrogène, le tout en fonction du paramètre η. Ces valeurs

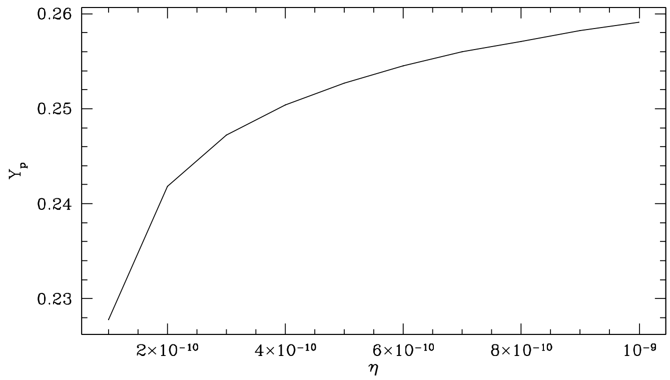

Figure 6: Abondance de l'hélium 4 en fonction du paramètre η, $Y_{0n} = 0.164$, $\tau_n = 887$.

peuvent être comparées aux observations. Des récentes mesures, Burles & al. [8] tendraient à donner une valeur proche de 3.4×10^{-5}, pour le rapport $\frac{X_d}{H}$, ce qui nous amènerait vers une valeur de η proche de 5×10^{-10}. D'autre part, Olive [9] propose des valeurs d'abondance d'hélium 4 entre 0.23 et 0.244 selon les régions observées. Le paramètre η prendrait alors une valeur aux alentours de 2×10^{-10}.

7.2 Méthode de mise à l'équilibre

Les considérations précédentes sur les problèmes relatifs à la méthode de linéarisation nous ont amenées à utiliser une méthode de mise à l'équilibre du deutérium et du bérilium. Cependant, aucun résultat n'a pu être obtenu à partir de cette méthode. La raison est que les valeurs obtenues pour les abondances

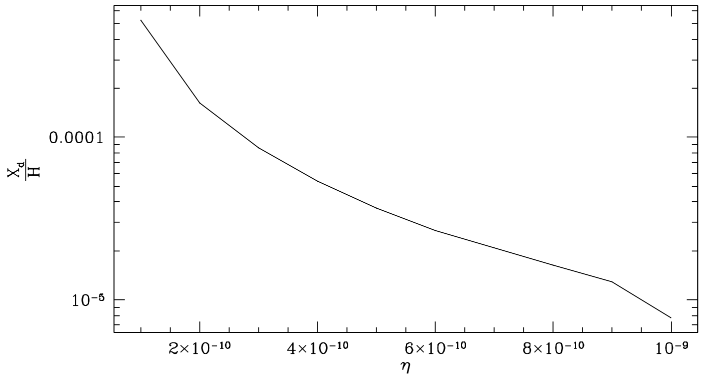

Figure 7: Densité réduite du deutérium sur la densité réduite de l'hydrogène en fonction du paramètre η, $Y_{0n} = 0.164$, $\tau_n = 887$.

du deutérium et du bérilium ne convergent pas en effectuant les itérations dans la boucle secondaire. Les raisons ne sont pour le moment pas connues. Il se peut cependant, comme le programme a été réalisé en peu de temps qu'une erreur s'y soit glissée.

8 Conclusion

La nucléosynthèse primordiale est un échelon important dans l'évolution de notre univers. Elle apporte, en outre, des arguments solides en faveur du modèle standard. Ce travail nous montre qu'il est possible de déduire les abondances du deutérium et de l'hélium 4 à partir d'un réseau de réactions simplifié. Pour obtenir les abondances correctes des éléments comme le tritium, l'hélium 3, le lithium 6 et 7 et le bérilium, la méthode utilisée s'est révélée insuffisante. Cependant, en effectuant quelques modifications sur la programmation, les abondances de tous les éléments cités doivent être obtenues dans des bonnes proportions.

Références

[1] Weinberg, S. 1972, Gravitation and Cosmology

[2] Dimopoulos, S., Esmailzadeh, R., Starkman, G.D., ApJ 1992 Vol. **378**, p. 504

[3] Wagoner, R.,Fowler, a., Hoyle, F.,ApJ 1967 Vol. **148**, p. 3

[4] Wagoner, V.,ApJ 1973 Vol. **179**, p. 343

[5] Börner, G. 1988 The Early Universe : Facts and Fictions

[6] Arnett & Truran, ApJ 1969 Vol. **157**, p. 359

[7] Peebles,P.J.E. Ast.J.,**146**,542 (1966)

[8] Burles,S. & Tytler,D., submitted to The Astrophysical Journal (1997)

[9] Olive,K.A., astro-ph/9712160 (1997)

[10] R.M.Barnett & al., Phys Rew, **D54**, 1 (1996)

A Numérotation des taux

$$
\begin{aligned}
[pn\gamma d] &= \texttt{taux(2)} & [dn\gamma T] &= \texttt{taux(3)} \\
[3n\gamma\alpha] &= \texttt{taux(4)} & [6n\gamma 7] &= \texttt{taux(5)} \\
[3npT] &= \texttt{taux(6)} & [8np7] &= \texttt{taux(7)} \\
[6n\alpha T] &= \texttt{taux(8)} & [8n\alpha\alpha] &= \texttt{taux(9)} \\
[pd\gamma 3] &= \texttt{taux(10)} & [Tp\gamma\alpha] &= \texttt{taux(11)} \\
[6p\gamma 8] &= \texttt{taux(12)} & [6p\alpha 3] &= \texttt{taux(13)} \\
[7p\alpha\alpha] &= \texttt{taux(14)} & [d\alpha\gamma 6] &= \texttt{taux(15)} \\
[T\alpha\gamma 7] &= \texttt{taux(16)} & [3\alpha\gamma 8] &= \texttt{taux(17)} \\
[ddn3] &= \texttt{taux(18)} & [ddpT] &= \texttt{taux(19)} \\
[Tdn\alpha] &= \texttt{taux(20)} & [3dp\alpha] &= \texttt{taux(21)} \\
[33pp\alpha] &= \texttt{taux(22)} & [7dn\alpha\alpha] &= \texttt{taux(23)} \\
[8dp\alpha\alpha] &= \texttt{taux(24)} & [7n\gamma Li_8] &= \texttt{taux(25)} \\
[7p\gamma B_8] &= \texttt{taux(26)} & [6\alpha\gamma B_{10}] &= \texttt{taux(27)} \\
[d\gamma np] &= \texttt{taux(28)} & [pTn3] &= \texttt{taux(29)} \\
[B\gamma 3\alpha] &= \texttt{taux(30)} & &
\end{aligned}
$$

B Programme principal

```
program main_taux

   use sub

implicit none

double precision

::dt=0.0001,ds,teta1,teta2,tetatrans

integer, parameter

::nbre=9 ! nbre d'elements

        double precision,dimension(nbre,nbre+1)

         ::b,sol

double precision,dimension(nbre)

::y,m,x

double precision,dimension(35)

::taux

double precision

::t,r,n,t_finale,t_init,somme,it,teta

integer

::i,j,k,elt

integer

::y_fichier1,x_fichier1,source_fichier

        integer

         ::y_fichier2,x_fichier2

        integer

         ::y_fichier3,x_fichier3,fichier_result

double precision,dimension(15)
```

```
::info

        integer

         ::choix,ligne,l




print *,"debut main_taux"

y_fichier1=1
x_fichier1=2
y_fichier2=21
x_fichier2=22
y_fichier3=31
x_fichier3=32
source_fichier=4

open(y_fichier1,file='y.list1')
rewind(y_fichier1)
open(x_fichier1,file='x.list1')
rewind(x_fichier1)

open(y_fichier2,file='y.list2')
rewind(y_fichier2)
open(x_fichier2,file='x.list2')
rewind(x_fichier2)

open(y_fichier3,file='y.list3')
rewind(y_fichier3)
open(x_fichier3,file='x.list3')
rewind(x_fichier3)

open(source_fichier,file='source.taux')
rewind(source_fichier)

do i=1,13
  read(source_fichier,*)info(i)
end do

ligne=0
info(9)=0
ligne=info(13)*37

do while (info(9)==0)

  print *,"  "
  print *,"numero :",info(13)
  print *,"0. debut du programme "
```

```
  print *,"1. temperature initiale :    ",info(1)
  print *,"2. temperature finale :      ",info(2)
  print *,"3. pas de temperature :      ",info(3)
  print *,"   nombre d'iterations :     ",info(4)
  print *,"4. densite de baryons :      ",info(5)
  print *,"5. abondance de neutrons :   ",info(6)
  print *,"   abondance de protons :    ",info(7)
  print *,"6  parametre teta 1 :        ",info(8)
  print *,"7  parametre teta 2 :        ",info(10)
  print *,"8  temperature transition :  ",info(11)
  print *,"9  ecriture (0 ou 1) :       ",info(12)


  print *,"  "
  print *,"choix du parametre a modifier :"
  read *,choix

  select case (choix)

case (0)
        print *,"debut du programe :"
        info(9)=1

case (1)
        print *,"temperature initale :"
        read *,info(1)

case (2)
        print *,"temperature finale :"
        read *,info(2)

case (3)
        print *,"pas de temperature :"
        read *,info(3)

case (4)
        print *,"densite de baryons :"
        read *,info(5)

case (5)
        print *,"abondance de neutrons :"
        read *,info(6)
        info(7)=1-info(6)

case (6)
        print *,"parametre teta 1 :"
        read *,info(8)

case (7)
        print *,"parametre teta 2 :"
```

```
        read *,info(10)

case (8)
        print *,"temperature de transition :"
        read *,info(11)

case (9)
        print *,"ecriture :"
        read *,info(12)



  end select

info(4)=(info(1)-info(2))/info(3)
end do





do i=1,nbre ! initialisation de b et y
  do j=1,nbre+1
      b(i,j)=0
  end do
      y(i)=0
end do



m(1)=1 ! masses atomiques
m(2)=2
m(3)=3
m(4)=3
m(5)=4
m(6)=6
m(7)=7
m(8)=7
m(9)=1



! valeurs initiales

y(1)=info(6)
y(9)=info(7)
t_init=info(1)
t_finale=info(2)
dt=info(3)
teta1=info(8)
```

```
teta2=info(10)
tetatrans=info(11)



! ------- debut boucle principale -------



do t=t_init,t_finale,-dt

  r=info(5)*(1E-5*(t-dt)**3.0) !1.85E-5*t**3.0

  call sbrout_taux(t-dt,r,taux)

  if (t>tetatrans) then
    teta=teta1
  else
    teta=teta2
  end if

  !ds=2*teta*(t-dt)**(-3.)*dt
  ds=(teta*(t-dt)**(-2.))-(teta*t**(-2.))

  !call sbrout_controle_taux(y,taux,ds,l)

  ! equation pour le neutron -- n -- 1

  b(1,1)=1+(y(9)*taux(2)+y(3)*taux(6)+taux(1))*ds
  b(1,2)=(-y(2)*taux(18)-y(4)*taux(20)-taux(28))*ds
  b(1,3)=(y(1)*taux(6))*ds
  b(1,4)=(-y(2)*taux(20)-y(9)*taux(29))*ds
  b(1,6)=0
  b(1,7)=0
  b(1,8)=0
  b(1,5)=0
  b(1,9)=(y(1)*taux(2)-y(4)*taux(29))*ds

  b(1,10)=y(1) + ds*(-0.5*y(2)*y(2)*taux(18) -y(2)*y(4)
   *taux(20)-y(9)*y(4)*taux(29)+y(1)*y(9)*
   taux(2)+y(1)*y(3)*taux(6))

  ! equation pour le deuterium -- d -- 2

  b(2,1)=(-y(9)*taux(2))*ds
  b(2,2)=1+(2*y(2)*taux(19)+2*y(2)*taux(18)+y(4)*
   taux(20)+y(3)*taux(21)+y(9)*taux(10)+taux(28))*ds
  b(2,3)=(y(2)*taux(21))*ds
  b(2,4)=(y(2)*taux(20))*ds
  b(2,6)=0
```

```
b(2,7)=0
b(2,8)=0
b(2,5)=0
b(2,9)=(-y(1)*taux(2)+y(2)*taux(10))*ds

b(2,10)=y(2) + ds*(-y(1)*y(9)*taux(2)+y(2)*y(2)*
 taux(19) &
                  +y(2)*y(2)*taux(18)+y(2)*y(4)*
                  taux(20) &
                  +y(2)*y(3)*taux(21)+y(2)*y(9)*
                  taux(10))

! equation pour l'helium 3 -- 3 -- 3

b(3,1)=(y(3)*taux(6))*ds
b(3,2)=(-y(9)*taux(10)-y(2)*taux(18)+y(3)*taux(21))*ds
b(3,3)=1+(y(2)*taux(21)+y(1)*taux(6))*ds
b(3,4)=(-y(9)*taux(29))*ds
b(3,6)=0
b(3,7)=0
b(3,8)=0
b(3,5)=0
b(3,9)=(-y(2)*taux(10)-y(4)*taux(29))*ds

b(3,10)=y(3) + ds*(-y(2)*y(9)*taux(10)-y(4)*y(9)
 *taux(29) &
              -0.5*y(2)*y(2)*taux(18)+y(2)*y(3)*
              taux(21) &
                  +y(1)*y(3)*taux(6))

! equation pour le tritium -- t -- 4

b(4,1)=(-y(3)*taux(6))*ds
b(4,2)=(-y(2)*taux(19)+y(4)*taux(20))*ds
b(4,3)=(-y(1)*taux(6))*ds
b(4,4)=1+(y(2)*taux(20)+y(9)*taux(29)+y(9)*taux(11))*ds
b(4,6)=0
b(4,7)=0
b(4,8)=0
b(4,5)=0
b(4,9)=(y(4)*taux(29)+y(4)*taux(11))*ds

b(4,10)=y(4) + ds*(-y(1)*y(3)*taux(6)-0.5*y(2)*y(2)*
 taux(19) &
                  +y(2)*y(4)*taux(20)+y(9)*y(4)*
                  taux(29) &
                  +y(9)*y(4)*taux(11))

! equation pour le litium 6 -- 6 -- 6
```

```
b(6,1)=(y(6)*taux(8))*ds
b(6,2)=(-y(5)*taux(15))*ds
b(6,3)=0
b(6,4)=0
b(6,6)=1+(y(1)*taux(8)+y(9)*taux(13))*ds
b(6,7)=0
b(6,8)=0
b(6,5)=(-y(2)*taux(15))*ds
b(6,9)=(y(6)*taux(13))*ds

b(6,10)=y(6) + ds*(-y(2)*y(5)*taux(15)+y(1)*y(6)*
 taux(8)+y(9)*y(6)*taux(13))

! equation pour le litium 7 -- 7 -- 7

b(7,1)=(-y(8)*taux(7)+y(7)*taux(25)-y(6)*taux(5))*ds
b(7,2)=0
b(7,3)=0
b(7,4)=(-y(5)*taux(16))*ds
b(7,6)=(-y(1)*taux(5))*ds
b(7,7)=1+(y(9)*taux(14)+y(1)*taux(25))*ds
b(7,8)=(-y(1)*taux(7))*ds
b(7,5)=(-y(4)*taux(16))*ds
b(7,9)=(y(7)*taux(14))*ds

b(7,10)=y(7) + ds*(-y(1)*y(6)*taux(5)-y(1)*y(8)*
 taux(7) &
                  -y(4)*y(5)*taux(16)+y(9)*y(7)*
             taux(14) &
                  +y(1)*y(7)*taux(25))

! equation pour le berilium  -- b -- 8

b(8,1)=(y(8)*taux(7))*ds
b(8,2)=(y(8)*taux(24))*ds
b(8,3)=(-y(5)*taux(17))*ds
b(8,4)=0
b(8,6)=(-y(9)*taux(12))*ds
b(8,7)=0
b(8,8)=1+(y(1)*taux(7)+y(2)*taux(24)+y(9)*taux(26)+
 taux(30))*ds
b(8,5)=(-y(3)*taux(17))*ds
b(8,9)=(-y(6)*taux(12)+y(8)*taux(26))*ds

b(8,10)=y(8) + ds*(-y(9)*y(6)*taux(12)-y(3)*y(5)*
 taux(17) &
                  +y(1)*y(8)*taux(7)+y(9)*y(8)*
             taux(26) &
                  +y(2)*y(8)*taux(24))
```

```
! equation pour l'helium 4  -- a -- 5

b(5,1)=(-y(3)*taux(4))*ds
b(5,2)=(-y(3)*taux(21)-y(4)*taux(20))*ds
b(5,3)=(-y(1)*taux(4)-y(2)*taux(21))*ds
b(5,4)=(-y(2)*taux(20)-y(9)*taux(11))*ds
b(5,6)=0
b(5,7)=0
b(5,8)=0
b(5,5)=1.
b(5,9)=(-y(4)*taux(11))*ds

b(5,10)=y(5) + ds*(-y(2)*y(3)*taux(21)-y(1)*y(3)*
 taux(4) &
                   -y(2)*y(4)*taux(20)-y(9)*y(4)*
              taux(11))

! equation pour le proton  -- p -- 9

b(9,1)=(-y(3)*taux(6)+y(9)*taux(2)-taux(1))*ds
b(9,2)=(-y(3)*taux(21)-y(2)*taux(19)+y(9)*taux(10)-
 taux(28))*ds
b(9,3)=(-y(1)*taux(6)-y(2)*taux(21))*ds
b(9,4)=(y(9)*taux(29)+y(9)*taux(11))*ds
b(9,6)=0
b(9,7)=0
b(9,8)=0
b(9,5)=0
b(9,9)=1+(y(4)*taux(29)+y(1)*taux(2)+y(2)*taux(10)+
 y(4)*taux(11))*ds

b(9,10)=y(9) + ds*(-y(1)*y(3)*taux(6)-y(2)*y(3)*
 taux(21) &
               -0.5*y(2)*y(2)*taux(19)+y(9)*y(4)*
       taux(29) &
                   +y(1)*y(9)*taux(2)+y(2)*y(9)*
              taux(10) &
                   +y(9)*y(4)*taux(11))




call girl(b,y,nbre,1)

somme=y(1)+2*y(2)+3*y(3)+3*y(4)+4*y(5)
 +6*y(6)+7*y(7)+7*y(8)+y(9)
print *,"somme :                ", somme

write(y_fichier1,*) t,y(1),y(2),y(3)
write(y_fichier2,*) t,y(4),y(5),y(6)
```

```
  write(y_fichier3,*) t,y(7),y(8),y(9)

  do i=1,nbre
  x(i)=m(i)*y(i)
  end do

  write(x_fichier1,*) t,x(1),x(2),x(3)
  write(x_fichier2,*) t,x(4),x(5),x(6)
  write(x_fichier3,*) t,x(7),x(8),x(9)

  print *,"temperature   : ",t

end do

if (info(12)==1.) then

  print *,"ecriture sur resultat_SBBN"

  open(fichier_result,file='resultat_SBBN_6')

  !rewind(fichier_result)

  do i=0,ligne
    print *,i
    read(fichier_result,*)
  end do

  write(fichier_result,*)"resultats numero :",info(13)
  write(fichier_result,*)"   "


  write(fichier_result,*)"temperature initiale :    ",info(1)
  write(fichier_result,*)"temperature finale :      ",info(2)
  write(fichier_result,*)"pas de temperature :      ",info(3)
  write(fichier_result,*)"nombre d'iterations :     ",info(4)
  write(fichier_result,*)"densite de baryons :      ",info(5)
  write(fichier_result,*)"abondance de neutrons :   ",info(6)
  write(fichier_result,*)"abondance de protons :    ",info(7)
  write(fichier_result,*)"parametre teta 1 :        ",info(8)
  write(fichier_result,*)"parametre teta 2 :        ",info(10)
  write(fichier_result,*)"temperature transition :  ",info(11)

  write(fichier_result,*)"   "
  write(fichier_result,*)"abondances y"
  write(fichier_result,*)"   "

  write(fichier_result,*)"neutrons    : ",y(1)
  write(fichier_result,*)"deuterium   : ",y(2)
  write(fichier_result,*)"helium3     : ",y(3)
  write(fichier_result,*)"tritium     : ",y(4)
```

```
  write(fichier_result,*)"helium 4    : ",y(5)
  write(fichier_result,*)"litium 6    : ",y(6)
  write(fichier_result,*)"litium 7    : ",y(7)
  write(fichier_result,*)"berilium    : ",y(8)
  write(fichier_result,*)"protons     : ",y(9)

  write(fichier_result,*)"   "
  write(fichier_result,*)"abondances x"
  write(fichier_result,*)"   "

  write(fichier_result,*)"neutrons    : ",x(1)
  write(fichier_result,*)"deuterium   : ",x(2)
  write(fichier_result,*)"helium3     : ",x(3)
  write(fichier_result,*)"tritium     : ",x(4)
  write(fichier_result,*)"helium 4    : ",x(5)
  write(fichier_result,*)"litium 6    : ",x(6)
  write(fichier_result,*)"litium 7    : ",x(7)
  write(fichier_result,*)"berilium    : ",x(8)
  write(fichier_result,*)"protons     : ",x(9)
  write(fichier_result,*)"----------------------"

  close(fichier_result)

  info(13)=info(13)+1

end if


rewind(source_fichier)

do i=1,13
  write(source_fichier,*) info(i)
end do


close(y_fichier1)
close(x_fichier1)
close(y_fichier2)
close(x_fichier2)
close(y_fichier3)
close(x_fichier3)
close(source_fichier)

print *,"neutrons  y  : ",y(1),"  x : ",x(1)
print *,"deuterium y  : ",y(2),"  x : ",x(2)
print *,"helium3   y  : ",y(3),"  x : ",x(3)
print *,"tritium   y  : ",y(4),"  x : ",x(4)
print *,"helium 4  y  : ",y(5),"  x : ",x(5)
print *,"litium 6  y  : ",y(6),"  x : ",x(6)
print *,"litium 7  y  : ",y(7),"  x : ",x(7)
```

```
print *,"berilium  y  : ",y(8),"  x : ",x(8)
print *,"protons   y  : ",y(9),"  x : ",x(9)



somme=0

do i=1,nbre
somme=somme+m(i)*y(i)
end do

somme=y(1)+2*y(2)+3*y(3)+3*y(4)+4*y(5)
+6*y(6)+7*y(7)+7*y(8)+y(9)
print *,"somme : ", somme


print *,"fin main_taux"

end program main_taux
```

C Programme principal : mise à l'équilibre

```
program main_taux  !version mise a l'equilibre

   use sub

!implicit none

double precision

::dt=0.0001,ds,teta1,teta2,tetatrans

integer, parameter

::nbre=9 ! nbre d'elements

        double precision,dimension(nbre-2,nbre-1)

         ::b
double precision,dimension(nbre)

::y,m,x

double precision,dimension(nbre-2)

::sol

double precision,dimension(35)

::taux

double precision

::t,r,n,t_finale,t_init,somme,it,teta

integer

::i,j,k,elt

integer

::y_fichier1,x_fichier1,source_fichier

        integer

         ::y_fichier2,x_fichier2

        integer

         ::y_fichier3,x_fichier3,fichier_result
```

```
double precision,dimension(15)

::info

        integer

         ::choix,ligne

double precision

::err,err2,err8, errlimit, ysto2,ysto8




print *,"debut main_taux"

y_fichier1=1
x_fichier1=2
y_fichier2=21
x_fichier2=22
y_fichier3=31
x_fichier3=32
source_fichier=4

open(y_fichier1,file='y.list1')
rewind(y_fichier1)
open(x_fichier1,file='x.list1')
rewind(x_fichier1)

open(y_fichier2,file='y.list2')
rewind(y_fichier2)
open(x_fichier2,file='x.list2')
rewind(x_fichier2)

open(y_fichier3,file='y.list3')
rewind(y_fichier3)
open(x_fichier3,file='x.list3')
rewind(x_fichier3)

open(source_fichier,file='source.taux')
rewind(source_fichier)

do i=1,13
  read(source_fichier,*)info(i)
end do

ligne=0
info(9)=0
```

```
ligne=info(13)*37

do while (info(9)==0)

  print *,"  "
  print *,"numero :",info(13)
  print *,"0. debut du programme "
  print *,"1. temperature initiale :    ",info(1)
  print *,"2. temperature finale :      ",info(2)
  print *,"3. pas de temperature :      ",info(3)
  print *,"   nombre d'iterations :     ",info(4)
  print *,"4. densite de baryons :      ",info(5)
  print *,"5. abondance de neutrons :   ",info(6)
  print *,"   abondance de protons :    ",info(7)
  print *,"6  parametre teta 1 :        ",info(8)
  print *,"7  parametre teta 2 :        ",info(10)
  print *,"8  temperature transition :  ",info(11)
  print *,"9  ecriture (0 ou 1) :       ",info(12)


  print *,"  "
  print *,"choix du parametre a modifier :"
  read *,choix

  select case (choix)

case (0)
        print *,"debut du programe :"
        info(9)=1

case (1)
        print *,"temperature initale :"
        read *,info(1)

case (2)
        print *,"temperature finale :"
        read *,info(2)

case (3)
        print *,"pas de temperature :"
        read *,info(3)

case (4)
        print *,"densite de baryons :"
        read *,info(5)

case (5)
        print *,"abondance de neutrons :"
        read *,info(6)
        info(7)=1-info(6)
```

```
case (6)
        print *,"parametre teta 1 :"
        read *,info(8)

case (7)
        print *,"parametre teta 2 :"
        read *,info(10)

case (8)
        print *,"temperature de transition :"
        read *,info(11)

case (9)
        print *,"ecriture :"
        read *,info(12)



  end select

info(4)=(info(1)-info(2))/info(3)
end do




do i=1,nbre-2 ! initialisation de b et y
  do j=1,nbre-1
      b(i,j)=0
  end do
end do

do j=1,nbre
      y(j)=0
end do


m(1)=1 ! masses atomiques
m(2)=2
m(3)=3
m(4)=3
m(5)=4
m(6)=6
m(7)=7
m(8)=7
m(9)=1
```

```
! valeurs initiales

y(1)=info(6)
y(9)=info(7)
y(2)=0
y(8)=0
t_init=info(1)
t_finale=info(2)
dt=info(3)
teta1=info(8)
teta2=info(10)
tetatrans=info(11)
errlimit=1E-30



! ------- debut boucle principale -------



do t=t_init,t_finale,-dt

  r=info(5)*(1E-5*(t-dt)**3.0) !1.85E-5*t**3.0

  call sbrout_taux(t-dt,r,taux)

  if (t>tetatrans) then
    teta=teta1
  else
    teta=teta2
  end if

  !ds=2*teta*(t-dt)**(-3.)*dt
  ds=(teta*(t-dt)**(-2.))-(teta*t**(-2.))

  !-------boucle secondaire--------------------

ysto2=y(2)
ysto8=y(8)
err=1.


do while(err>errlimit)



  ! equation pour le neutron -- n -- 1

  b(1,1)=1+(y(9)*taux(2)+y(3)*taux(6)+taux(1))*ds
```

```
  !b(1,2)=(-y(2)*taux(18)-y(4)*taux(20)-taux(28))*ds
  b(1,3)=(y(1)*taux(6))*ds
  b(1,4)=(-y(2)*taux(20)-y(9)*taux(29))*ds
  b(1,6)=0
  b(1,7)=0
  !b(1,8)=0
  b(1,5)=0
  b(1,2)=(y(1)*taux(2)-y(4)*taux(29))*ds

  b(1,8)=y(1) + ds*(0.5*y(2)*y(2)*taux(18)+y(2)*taux(28) &
                  -y(9)*y(4)*taux(29)+y(1)*y(9)*taux(2) &
                  +y(1)*y(3)*taux(6))

! equation pour le proton  -- p -- 9

  b(2,1)=(-y(3)*taux(6)+y(9)*taux(2)-taux(1))*ds
  !b(2,2)=(-y(3)*taux(21)-y(2)*taux(19)+y(9)*taux(10)
   -taux(28))*ds
  b(2,3)=(-y(1)*taux(6)-y(2)*taux(21))*ds
  b(2,4)=(y(9)*taux(29)+y(9)*taux(11))*ds
  b(2,6)=0
  b(2,7)=0
  !b(2,8)=0
  b(2,5)=0
  b(2,2)=1+(y(4)*taux(29)+y(1)*taux(2)+y(2)*taux(10)+y(4)
   *taux(11))*ds

  b(2,8)=y(9) + ds*(-y(1)*y(3)*taux(6)+y(2)*taux(28) &
               +0.5*y(2)*y(2)*taux(19)+y(9)*y(4)
               *taux(29) &
                   +y(1)*y(9)*taux(2) &
                   +y(9)*y(4)*taux(11))


  ! equation pour l'helium 3 -- 3 -- 3

  b(3,1)=(y(3)*taux(6))*ds
  !b(3,2)=(-y(9)*taux(10)-y(2)*taux(18)+y(3)*taux(21))*ds
  b(3,3)=1+(y(2)*taux(21)+y(1)*taux(6))*ds
  b(3,4)=(-y(9)*taux(29))*ds
  b(3,6)=0
  b(3,7)=0
  !b(3,8)=0
  b(3,5)=0
  b(3,2)=(-y(2)*taux(10)-y(4)*taux(29))*ds

  b(3,8)=y(3) + ds*(-y(4)*y(9)*taux(29) &
               +0.5*y(2)*y(2)*taux(18) &
                   +y(1)*y(3)*taux(6))
```

```
! equation pour le tritium -- t -- 4

b(4,1)=(-y(3)*taux(6))*ds
!b(4,2)=(-y(2)*taux(19)+y(4)*taux(20))*ds
b(4,3)=(-y(1)*taux(6))*ds
b(4,4)=1+(y(2)*taux(20)+y(9)*taux(29)+y(9)*taux(11))*ds
b(4,6)=0
b(4,7)=0
!b(4,8)=0
b(4,5)=0
b(4,2)=(y(4)*taux(29)+y(4)*taux(11))*ds

b(4,8)=y(4) + ds*(-y(1)*y(3)*taux(6)+0.5*y(2)*y(2)
 *taux(19) &
                   +y(9)*y(4)*taux(29) &
                   +y(9)*y(4)*taux(11))

! equation pour le litium 6 -- 6 -- 6

b(6,1)=(y(6)*taux(8))*ds
!b(6,2)=(-y(5)*taux(15))*ds
b(6,3)=0
b(6,4)=0
b(6,6)=1+(y(1)*taux(8)+y(9)*taux(13))*ds
b(6,7)=0
!b(6,8)=0
b(6,5)=(-y(2)*taux(15))*ds
b(6,2)=(y(6)*taux(13))*ds

b(6,8)=y(6) + ds*(y(1)*y(6)*taux(8)+y(9)*y(6)*taux(13))

! equation pour le litium 7 -- 7 -- 7

b(7,1)=(-y(8)*taux(7)+y(7)*taux(25)-y(6)*taux(5))*ds
!b(7,2)=0
b(7,3)=0
b(7,4)=(-y(5)*taux(16))*ds
b(7,6)=(-y(1)*taux(5))*ds
b(7,7)=1+(y(9)*taux(14)+y(1)*taux(25))*ds
!b(7,8)=(-y(1)*taux(7))*ds
b(7,5)=(-y(4)*taux(16))*ds
b(7,2)=(y(7)*taux(14))*ds

b(7,8)=y(7) + ds*(-y(1)*y(6)*taux(5) &
                   -y(4)*y(5)*taux(16)+y(9)*y(7)
                   *taux(14) &
                   +y(1)*y(7)*taux(25))
```

```
! equation pour l'helium 4  -- a -- 5

b(5,1)=(-y(3)*taux(4))*ds
!b(5,2)=(-y(3)*taux(21)-y(4)*taux(20))*ds
b(5,3)=(-y(1)*taux(4)-y(2)*taux(21))*ds
b(5,4)=(-y(2)*taux(20)-y(9)*taux(11))*ds
b(5,6)=0
b(5,7)=0
!b(5,8)=0
b(5,5)=1.
b(5,2)=(-y(4)*taux(11))*ds

b(5,8)=y(5) + ds*(-y(1)*y(3)*taux(4) &
                   -y(9)*y(4)*taux(11))



call girl(b,sol,nbre-2,1)

y(1)=sol(1)
y(9)=sol(2)
y(3)=sol(3)
y(4)=sol(4)
y(5)=sol(5)
y(6)=sol(6)
y(7)=sol(7)



y(2)=(y(1)*y(9)*taux(2))/(y(4)*taux(20)+y(3)*taux(21)
 +taux(28)+y(9)*taux(10))

y(8)=(y(9)*y(6)*taux(12)+y(3)*y(5)*taux(17))/&
      (taux(30)+y(1)*taux(7)+y(9)*taux(26)+y(2)*taux(24))

err2=abs(ysto2-y(2))
err8=abs(ysto8-y(8))

if (err2>err8) then
   err=err2
else
   err=err8
end if

ysto2=y(2)
ysto8=y(8)

!print *,"deuterium   : ",ysto2
!print *,"berilium                             : ",ysto8
```

```
  somme=y(1)+2*y(2)+3*y(3)+3*y(4)+4*y(5)
   +6*y(6)+7*y(7)+7*y(8)+y(9)
  print *,"somme :             ", somme


end do

!------------fin boucle secondaire----------





  somme=y(1)+2*y(2)+3*y(3)+3*y(4)+4*y(5)
   +6*y(6)+7*y(7)+7*y(8)+y(9)
  print *,"somme :                             ", somme

  write(y_fichier1,*) t,y(1),y(2),y(3)
  write(y_fichier2,*) t,y(4),y(5),y(6)
  write(y_fichier3,*) t,y(7),y(8),y(9)

  do i=1,nbre
  x(i)=m(i)*y(i)
  end do

  write(x_fichier1,*) t,x(1),x(2),x(3)
  write(x_fichier2,*) t,x(4),x(5),x(6)
  write(x_fichier3,*) t,x(7),x(8),x(9)

  print *,"temperature   : ",t

end do

if (info(12)==1.) then

  print *,"ecriture sur resultat_SBBN"

  open(fichier_result,file='resultat_SBBN_6')

  !rewind(fichier_result)

  do i=0,ligne
    print *,i
    read(fichier_result,*)
  end do

  write(fichier_result,*)"resultats numero :",info(13)
  write(fichier_result,*)"   "
```

```
  write(fichier_result,*)"temperature initiale :    ",info(1)
  write(fichier_result,*)"temperature finale :      ",info(2)
  write(fichier_result,*)"pas de temperature :      ",info(3)
  write(fichier_result,*)"nombre d'iterations :     ",info(4)
  write(fichier_result,*)"densite de baryons :      ",info(5)
  write(fichier_result,*)"abondance de neutrons :   ",info(6)
  write(fichier_result,*)"abondance de protons :    ",info(7)
  write(fichier_result,*)"parametre teta 1 :        ",info(8)
  write(fichier_result,*)"parametre teta 2 :        ",info(10)
  write(fichier_result,*)"temperature transition :  ",info(11)

  write(fichier_result,*)"   "
  write(fichier_result,*)"abondances y"
  write(fichier_result,*)"   "

  write(fichier_result,*)"neutrons    : ",y(1)
  write(fichier_result,*)"deuterium   : ",y(2)
  write(fichier_result,*)"helium3     : ",y(3)
  write(fichier_result,*)"tritium     : ",y(4)
  write(fichier_result,*)"helium 4    : ",y(5)
  write(fichier_result,*)"litium 6    : ",y(6)
  write(fichier_result,*)"litium 7    : ",y(7)
  write(fichier_result,*)"berilium    : ",y(8)
  write(fichier_result,*)"protons     : ",y(9)

  write(fichier_result,*)"   "
  write(fichier_result,*)"abondances x"
  write(fichier_result,*)"   "

  write(fichier_result,*)"neutrons    : ",x(1)
  write(fichier_result,*)"deuterium   : ",x(2)
  write(fichier_result,*)"helium3     : ",x(3)
  write(fichier_result,*)"tritium     : ",x(4)
  write(fichier_result,*)"helium 4    : ",x(5)
  write(fichier_result,*)"litium 6    : ",x(6)
  write(fichier_result,*)"litium 7    : ",x(7)
  write(fichier_result,*)"berilium    : ",x(8)
  write(fichier_result,*)"protons     : ",x(9)
  write(fichier_result,*)"----------------"

  close(fichier_result)

  info(13)=info(13)+1

end if


rewind(source_fichier)

do i=1,13
```

```
  write(source_fichier,*) info(i)
end do


close(y_fichier1)
close(x_fichier1)
close(y_fichier2)
close(x_fichier2)
close(y_fichier3)
close(x_fichier3)
close(source_fichier)

print *,"neutrons  y  : ",y(1),"  x : ",x(1)
print *,"deuterium y  : ",y(2),"  x : ",x(2)
print *,"helium3   y  : ",y(3),"  x : ",x(3)
print *,"tritium   y  : ",y(4),"  x : ",x(4)
print *,"helium 4  y  : ",y(5),"  x : ",x(5)
print *,"litium 6  y  : ",y(6),"  x : ",x(6)
print *,"litium 7  y  : ",y(7),"  x : ",x(7)
print *,"berilium  y  : ",y(8),"  x : ",x(8)
print *,"protons   y  : ",y(9),"  x : ",x(9)



somme=0

do i=1,nbre
somme=somme+m(i)*y(i)
end do

somme=y(1)+2*y(2)+3*y(3)+3*y(4)+4*y(5)
+6*y(6)+7*y(7)+7*y(8)+y(9)
print *,"somme : ", somme


print *,"fin main_taux"

end program main_taux
```

D Sousroutine

```
module sub

  implicit none

contains



subroutine sbrout_taux(t,r,taux)

 implicit none

   integer
   ::i
  double precision,dimension(35)
  ::taux
double precision
::ta,tb,t,r
double precision
::t_12,t_m32,t_m23,t_13,t_23,t_43,t_m13
double precision
::t_53,t_32,t_m1,ta_56,ta_13,tb_56,tb_13


!------ begining sbrout_taux ------


   t_12=t**(1./2.)
   t_m32=t**(-3./2.)
   t_m23=t**(-2./3.)
   t_m13=t**(-1./3.)
   t_13=t**(1./3.)
   t_23=t**(2./3.)
   t_43=t**(4./3.)
   t_53=t**(5./3.)
   t_m1=t**(-1.)
   t_32=t**(3./2.)

   ta=t/(1 - t*0.0969 + t_53*0.0284 /
    (1.-0.0969*t)**(2./3.) )
   tb=t/(1+0.0495*t)
   ta_56=ta**(5./6.)
   ta_13=ta**(1./3.)
   tb_56=tb**(5./6.)
   tb_13=tb**(1./3.)

   taux(1)=1./887  ! decomposition neutron Esmail 908
```

```
   taux(2)=r*44000*(1.-0.860*t_12+0.429*t)

   !taux 2 de Wagoner
   !taux(2)=r*2.5E4


   taux(3)=r*66.2*(1.+18.9*t)

   taux(4)=r*6.62*(1.+905*t)

   taux(5)=r*5960

   taux(6)=r*7.06E8*(1.-0.51*t_12+0.098*t)

   taux(7)=r*6.76E9*(1.-0.903*t_12+0.218*t)

   taux(8)=r*2.54E9*t_m32*exp(-2.53/t) + 1.68E8*
    (1.-0.261*(1.+49.18*t)**(-3./2.))

   taux(9)=r*2.05E4*(1.+3760*t)

   taux(10)=r*2.24E3*t_m23*exp(-3.72/t_13)*(1.+0.112*t_13+3.38
    *t_23+2.65*t)

   taux(11)=r*2.2E4*t_m23*exp(-3.869/t_13)*(1.+0.108*t_13+1.68
    *t_23+1.26*t+0.551&
*t_43+1.06*t_53)

   taux(12)=r*6.69E5*ta_56*t_m32*exp(-8.413/ta_13)

   taux(13)=r*3.73E10*t_m23*exp(-8.413/t_13-(t/5.5)**2.)
    *(1.+0.05*t_13-0.061&
*t_23-0.021*t+0.006*t_43+0.005*t_53)+1.33E10*t_m32
*exp(-17.763/t)&
+1.29E9*t_m1*exp(-21.82/t)

   taux(14)=r*6.13E8*t_m23*exp(-8.473/t_13-(t/30.068)**2.)
    *(1.+0.0492*t_13-1.56&
*t_23-0.539*t+0.966*t_43+0.845*t_53)+1.07E10*t_m32
*exp(-30.443/t)&
+1.54E6*t_m32*exp(-4.479/t)

   taux(15)=r*30.1*t_m23*exp(-7.423/t_13)*(1.+0.056*t_13-4.85
    *t_23+8.85*t-0.585&
*t_43-0.584*t_53)+85.5*t_m32*exp(-8.228/t)

   taux(16)=r*1.1E6*t_m23*exp(-8.08/t_13)*(1.+0.0516*t_13
    -0.408*t_23-0.148*t&+0.102*t_43+0.094*t_53)

   taux(17)=r*5.79E6*tb_56*t_m32*exp(-12.826/tb_13)
```

```
   taux(18)=r*3.97E8*t_m23*exp(-4.258/t_13)*(1.+0.098*t_13+0.876
    *t_23+0.6*t&
-0.041*t_43-0.071*t_53)

   taux(19)=r*4.17E8*t_m23*exp(-4.258/t_13)*(1.+0.098*t_13+0.518
    *t_23+0.355*t&
-0.01*t_43-0.018*t_53)

   taux(20)=r*8.09E10*t_m23*exp(-4.524/t_13-(t/0.12)**2.)
    *(1.+0.092*t_13+1.8*t_23&
+1.16*t+10.5*t_43+17.24*t_53)+8.73E8*t_m23*exp(-0.523/t)

   taux(21)=r*6.67E10*t_m23*exp(-7.181/t_13-(t/0.315)**2.)
    *(1.+0.058*t_13-1.14&
*t_23-0.464*t+3.08*t_43+3.18*t_53)+4.36E8/t_12*exp(-1.72/t)

   taux(22)=r*5.96E10*t_m23*exp(-12.276/t_13)*(1.+0.034
    *t_13-0.199*t_23-0.047*t&
+0.032*t_43+0.019*t_53)

   taux(23)=r*2.92E11*t_m23*exp(-10.259/t_13)

   taux(24)=r*1.07E12*t_m23*exp(-12.43/t_13)

   taux(25)=r*4.9E3+9.96E3*t_m32*exp(-2.62/t)

   taux(26)=r*3.09E5*t_m23*exp(-10.262/t_13)+2.53E3*t_m32
    *exp(-7.306/t)

   taux(27)=r*4.06E6*t_m23*exp(-18.79/t_13-(t/1.326)**2.)
    *(1.+0.022*t_13+1.54*t_23&
+0.239*t+2.2*t_43+0.869*t_53)+1.91E3*t_m32*exp(-3.484/t)
+1.01E4&
*t_m1*exp(-7.269/t)

   taux(28)=(4.68E9*taux(2)*t_32*exp(-25.82/t))/(r)
! inverse 2 photodissotiation


   taux(29)=taux(6)*exp(-8.864/t)
! inverse 6

   taux(30)=(1.12E10*taux(17)*t_32*exp(-18.42/t))/(r)
! inverse 17 photodissotiation




end subroutine sbrout_taux
```

```
!---------- end sbrout_taux -----------
```